SFJ
Fuente de Cantos
INTERNATIONAL COLLEGE

CALIF:

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

2º BACHILLERATO CIENCIA Y TECNOLOGÍA

Nombre:

TEORÍA:

1.- Vectores linealmente independientes y vectores linealmente dependientes.

CUESTIONES:

1.- Sean $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, $\bar{t}$ $\in R^3$. ¿Pueden esos vectores, los cuatros, formar una base de R^3?, y ¿un sistema generador de R^3?. Explicar.

2.- Consideremos los subespacios engendrados por los sistemas $S_1=\{\bar{x}, \bar{y}\}$ y $S_2=\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$. Explicar cuándo $L(S_1)=L(S_2)$ y cuándo $L(S_1) \neq L(S_2)$.

3.- En R^3, establecer:

a) Un sistema generador que no sea base.
b) Un sistema libre que no sea base.

PROBLEMAS:

1.- Dado el sistema S={ (1,1,0,0), (0,1,1,-1), (1,0,-1,1), (2,2,2,0)}, hallar rango deS, el subespacio engendrado por S, dimensión y base del mismo. Comprobar si el vector (2,1,2,0) pertenece a él o no.

2.- Si los vectores $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ son independientes, ¿también son independientes los vectores $\bar{x}+\bar{y}-2\bar{z}$, $\bar{x}+2\bar{y}-\bar{z}$, $\bar{x}+3\bar{y}$?.

3.- Estudiar si existe algún valor de a para que los vectores (a,1,1), (1,a,a) y (a+1,1,2) formen una base de R^3. ¿Para qué valores de a son los tres vectores dependientes?. En los casos de dependencia, hallar la relación.

4.- Dado el subconjunto de R^3 A=$\left\{(x,y,z)\in R^3 \,/\, x+2y=0, x-z=0\right\}$, demostrar si tiene estructura de subespacio vectorial sobre R. En caso afirmativo, hallar ecuaciones y base del mismo

5.- Estudiar la dependencia e independencia lineal de los vectores (a,1,1,1), (2,-a,2,0), (3,0,3,a), según los valores de a. En los casos de dependencia, hallar la relación de dependencia.

CUEST.

① $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t} \in \mathbb{R}^3$

- Sabemos que $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \dim \mathbb{R}^3 = 3 \Rightarrow$ en cualquier base de $\mathbb{R}^3$ hay 3 vect. indep., cualquier conjunto con más de 4 vect., estos son dep. $\Rightarrow$ No forman base.

- Sí podrían formar un sistema generador si 3 de los 4 vect. son indep.

② $S_1 = \{\bar{x}, \bar{y}\} \Rightarrow L(S_1) = \{\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \,/\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$S_2 = \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$ Si $\bar{z}$ es combinación lineal de $\bar{x}$ e $\bar{y}$ a la hora de hallar el subespacio engendrado por S_2 podríamos quitar $\bar{z} \Rightarrow L(S_2) = \{\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \,/\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow L(S_1) = L(S_2)$

. Si $\bar{z}$ no es comb. de $\bar{x}$ e $\bar{y} \Rightarrow L(S_2) = \{\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} + \gamma\bar{z} \,/\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow L(S_2) \neq L(S_1)$

③ a) ~~Para~~ tener una base, tenemos que coger 3 vectores indep.

Base de $\mathbb{R}^3 \Rightarrow B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

Si añadimos un vector, por ej., el $(2,3,4)$

$B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (2,3,4)\}$

No es base pero sí sistema generador.

b) Con 2 vect. indep no es base

$B = \{(1,0,0), (0,1,0)\}$ No es base de $\mathbb{R}^3$, necesitamos otro indep.; $\dim \mathbb{R}^3 = 3$

1) $S = \{ \overset{\overline{u_1}}{(1,1,0,0)}, \overset{\overline{u_2}}{(0,1,1,-1)}, \overset{\overline{u_3}=\overline{u_1}-\overline{u_2}}{\cancel{(1,0,-1,1)}}, \overset{\overline{u_4}}{(2,2,2,0)} \}$

$$\text{rg}\, S = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

$F_3 = F_1 - F_2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2+2-2 = 2$$

$L(S) = \{ a(1,1,0,0) + b(0,1,1,-1) + c(2,2,2,0) \ / \ a,b,c \in \mathbb{R} \}$

$B_{L(S)} = \{ (1,1,0,0), (0,1,1,-1), (2,2,2,0) \}$

$\dim L(S) = 3$

Veamos si $(2,1,2,0) \in$ o $\notin L(S)$

$$(2,1,2,0) = a(1,1,0,0) + b(0,1,1,-1) + c(2,2,2,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} a + 2c = 2 \\ a + b + 2c = 1 \\ b + 2c = 2 \\ -b = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to a = 0 \\ \to a = -1 \\ \to c = 1 \\ b = 0 \end{array} \Rightarrow (2,1,2,0) \notin L(S)$$

2) $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ indep. Sup. base canónica

$$\begin{array}{l} \overline{x} + \overline{y} - 2\overline{z} = (1,1,-2) \\ \overline{x} + 2\overline{y} - \overline{z} = (1,2,-1) \\ \overline{x} + 3\overline{y} = (1,3,0) \end{array} \qquad \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \text{son dep.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

3) Para que $\overline{x} = (a,1,1)$, $\overline{y} = (1,a,a)$, $\overline{z} = (a+1,1,2)$ formen base de $\mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow \text{rg}\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ a+1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ a+1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \cancel{2a^2} + 1 + a^2 + \cancel{a} - \cancel{a^2} - \cancel{a} - \cancel{a^2} - 2 \neq 0$$

$$a^2 - 1 \neq 0$$

$$a \neq \pm 1$$

son dep para $a = \pm 1$

$a=1$

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}=2 \Rightarrow \text{el } 1^{\circ} \text{ dep del } 2^{\circ} \text{ y } 3^{\circ}$$

$$(1,1,1)=\underset{\overset{\parallel}{1}}{\alpha}(1,1,1)+\underset{\overset{\parallel}{0}}{\beta}(2,1,2)$$

$a=-1$

$$rg\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}=2 \rightarrow \text{el } 1^{\circ} \text{ dep del } 2^{\circ} \text{ y } 3^{\circ}$$

$$(-1,1,1)=\underset{\overset{\parallel}{-1}}{\alpha}(1,-1,-1)+\underset{\overset{\parallel}{0}}{\beta}(0,1,2)$$

④ $A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, \begin{matrix} x+2y=0 \\ x-z=0 \end{matrix}\right\}$

A es subesp. vect si

$$\left.\begin{matrix} \forall (x,y,z)\,\&\,(x',y',z')\in A \\ \begin{matrix} x+2y=0 & x'+2y'=0 \\ x-z=0 & x'-z'=0 \end{matrix} \\ \forall\ a,b\in\mathbb{R} \end{matrix}\right\} \Rightarrow a(x,y,z)+b(x',y',z')\overset{¿?}{\in} A$$

Veamos si el vect resultante está en A

$$(ax+bx',\ ay+by',\ az+bz')\overset{¿?}{\in} A$$

Veamos si cumple las 2 condiciones

1) $ax+bx'+2(ay+by')\overset{¿?}{=}0$

$ax+bx'+2ay+2by'$

$\parallel$

$a\underset{\overset{\parallel}{0}}{(x+2y)}+b\underset{\overset{\parallel}{0}}{(x'+2y')}$

$a\cdot 0+b\cdot 0=0$

cierto

2) $ax+bx'-(az+bz')\overset{¿?}{=}0$

$ax+bx'-az-bz'\overset{¿?}{=}0$

$a\underset{\overset{\parallel}{0}}{(x-z)}+b\underset{\overset{\parallel}{0}}{(x'-z')}\overset{¿?}{=}0$

$a\cdot 0+b\cdot 0=0$

cierto

$\Rightarrow$ A es subesp. vect.

ECUACIONES

$$\left.\begin{aligned} x+2y &= 0 \\ x-z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Base

$\dim \mathbb{R}^3 = \dim A + n^{\circ}\,Ec$

$3 = \cancel{1} + 2 \Rightarrow \dim A = 1$

$\Rightarrow$ Base de A hay 1 vector.

Resolvemos el sistema

$$\left.\begin{aligned} x+2y &= 0 \\ x-z &= 0 \end{aligned}\right| \begin{aligned} &z+2y=0 \rightarrow y=-z/2 \\ &x=z \end{aligned} \qquad (z, -z/2, z)$$

2ec., 3incog. nos sobra 1

Para hallar la base damos valor a $z=2$

$\Rightarrow B = \{(2,-1,2)\}$

5) Estudio según valor a

$$rg\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -a & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & a \end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -a & 2 & 0 \\ 0 & 3 & a \end{vmatrix} = a^2-a \rightarrow$ se anula $a=0$, $a=1$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow rg M \geq 2 \ \forall a$

$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & a \end{vmatrix} = 2a^2-2a \rightarrow$ se anula $a=0$, $a=1$

Si $a\neq 0, a\neq 1 \rightarrow rg M = 3 \Rightarrow$ los 3 vect. son indep.

Si $a=0, a=1 \rightarrow rg M=2 \Rightarrow$ los " " " dep. 3ºvect. dep. de 1º y 2º

$a=0$

$(3,0,3,0) = \underset{0}{\alpha}(0,1,1,1) + \underset{3/2}{\beta}(2,0,2,0)$

$a=1$

$(3,0,3,1) = \underset{1}{\alpha}(1,1,1,1) + \underset{1}{\beta}(2,-1,2,0)$